TD 43 : Sous-espaces affines Indications

Sous-espaces affines

1 ★ On pose :

$$\mathscr{F} = \{M_{\lambda,\mu} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{K}\}$$

avec, pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$:

$$M_{\lambda,\mu} = \begin{pmatrix} 1+2\lambda-\mu & 0 \\ 2-\lambda-\mu & \lambda-\mu \end{pmatrix}$$

1) Écrire $M_{\lambda,\mu}$ sous la forme $A+\lambda B+\mu C$ avec A,B,C trois matrices à déterminer.
2) En déduire que $\mathscr{F}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. On donnera un point de $\mathscr{F}$ ainsi que la direction de $\mathscr{F}$.

2 ★☆ On note $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Soit $a, b \in \mathbb{R}$. On pose

$$\mathscr{F} = \{f \in E \mid f(a) = b\}$$

L'objectif est de montrer que $\mathscr{F}$ est un sous-espace affine de E.

1) Identifier un hyperplan H de E tel que pour tous $f, g \in \mathscr{F}$, on a $f-g \in H$.
2) Conclure. On donnera un point de $\mathscr{F}$ ainsi que la direction de $\mathscr{F}$.

Équations affines

3 ★★ Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$. On considère l'équation d'inconnue $y \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R})$:

$$(E): \quad ay'' + by' + cy = f(x)$$

avec a, b, c des réels donnés et $a \neq 0$.

1) Réécrire (E) sous la forme d'une équation affine : on notera φ l'application linéaire de cette réécriture.
2) On note H l'ensemble des solutions de l'équation homogène. Exprimer H en fonction de φ.
3) On définit l'application linéaire

$$\begin{aligned} \Psi : H &\to \mathbb{R}^2 \\ y &\mapsto (y(0), y'(0)) \end{aligned}$$

Montrer que Ψ est bijective. En déduire la dimension de H.

4) Dans la suite de l'exercice, on suppose que $(a,b,c) = (1,-3,2)$. Déterminer une base de H.
5) On suppose disposer d'une solution particulière y_p de (E). Déterminer l'ensemble des solutions de (E).

4 ★★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{K}$ des points distincts, et $y_1, \cdots, y_n \in \mathbb{K}$. On pose $\mathscr{P}$ l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{K}[X]$ vérifiant :

$$\begin{cases} P(x_1) = y_1 \\ \vdots \\ P(x_n) = y_n \end{cases}$$

Montrer que $\mathscr{P}$ est un sous-espace affine de $\mathbb{K}[X]$. On donnera un point de $\mathscr{P}$ ainsi que la direction de $\mathscr{P}$.
Si P_1 et P_2 sont dans $\mathscr{P}$, alors montrer que $P_1 - P_2$ est dans un s.e.v. à préciser. Ceci donne la direction de $\mathscr{P}$.

5 ★★ On note $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. On souhaite trouver toutes les focntions $f \in E$ qui vérifient

$$(E): \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+1) = f(x) + 1$$

On pose $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de (E), i.e. :

$$\mathscr{S} = \{f \in E \mid \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+1) = f(x) + 1\}$$

1) Donner une solution particulière simple de E, notée f_0.
2) Soit $f \in \mathscr{S}$. Montrer que $f - f_0$ est solution d'une équation fonctionnelle (E_H) que l'on précisera.
3) Vérifier que les solutions de (E_H) sont exactement les fonctions 1-périodiques.
4) En déduire $\mathscr{S}$.
5) Vérifier que $\mathscr{S}$ est un sous-espace affine. Préciser sa direction.
6) Réécrire (E) sous la forme d'une équation affine.